

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2015

**Eletrodinâmica Clássica**

11/08/2015 - 9h às 12h

(Escolha três dentre as quatro questões.)

## QUESTÃO 1: Eletrostática

Uma superfície esférica de raio  $R$  e espessura infinitesimal possui centro na origem. Considere que o seu potencial eletrostático é  $\Phi(r = R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi)$ , onde as variáveis espaciais estão expressas em coordenadas esféricas.

a) (40%) Calcule  $\Phi(\vec{r})$  em todo o espaço em termos de  $V(\theta, \varphi)$ .

b) (20%) Considere, agora, que  $V(\theta, \varphi) = V_0 \sin^2(\theta) \cos(2\varphi)$ , onde  $V_0$  é uma constante. Escreva  $V(\theta, \varphi)$  em função de harmônicos esféricos  $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ .

c) (40%) Calcule  $\Phi(\vec{r})$  em todo o espaço para o potencial  $V(\theta, \varphi)$  dado no item (b).

**Dados:**

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell',m'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

$$Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3 \cos^2(\theta)}{2} - 1 \right)$$

$$Y_{2,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) \exp(i\varphi)$$

$$Y_{2,2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\theta) \exp(2i\varphi)$$

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi)$$

## QUESTÃO 2: Magnetostática

Considere uma espira circular de raio  $R$  percorrida por uma corrente elétrica constante  $I$ . A espira encontra-se no plano  $xy$ , com centro na origem. O seu vetor densidade de corrente é dado em coordenadas cilíndricas por  $\vec{J}(\vec{r}) = I\delta(\rho - R)\delta(z)\hat{\phi}$ .

No gauge de Coulomb, o potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

O termo  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  do integrando pode ser expandido em série para  $r > r'$ , de modo que

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

a) (30%) Mostre, no caso da espira, que o primeiro termo da expansão em série acima de  $\vec{A}(\vec{r})$  é nulo.

b) (40%) Mostre que

$$\begin{aligned} \int J_x(\vec{r}') \vec{r}' dv' &= -I\pi R^2 \hat{j} \\ \int J_y(\vec{r}') \vec{r}' dv' &= I\pi R^2 \hat{i} \end{aligned}$$

e escreva o segundo termo da expansão em série de  $\vec{A}(\vec{r})$ .

c) (30%) O resultado do item (b) pode ser escrito na forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3},$$

onde  $\vec{m} = m\hat{k}$ . Identifique o vetor  $\vec{m}$  e interprete fisicamente.

**Dados:**

$$\hat{\phi} = -\sin(\varphi)\hat{i} + \cos(\varphi)\hat{j}$$

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = 0$$

### QUESTÃO 3: Equações de Maxwell

a) (40%) Escreva e interprete fisicamente as equações de Maxwell na forma macroscópica, para um meio linear homogêneo e isotrópico em que  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .

b) (30%) A partir da lei de Ampère-Maxwell, obtenha a equação da continuidade para as cargas e correntes totais. Interprete o seu significado.

c) (30%) Considere que os campos elétrico e magnético sejam escritos na forma

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

e

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Se  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são invariantes sob as transformações de gauge

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + f(\vec{r}, t)$$

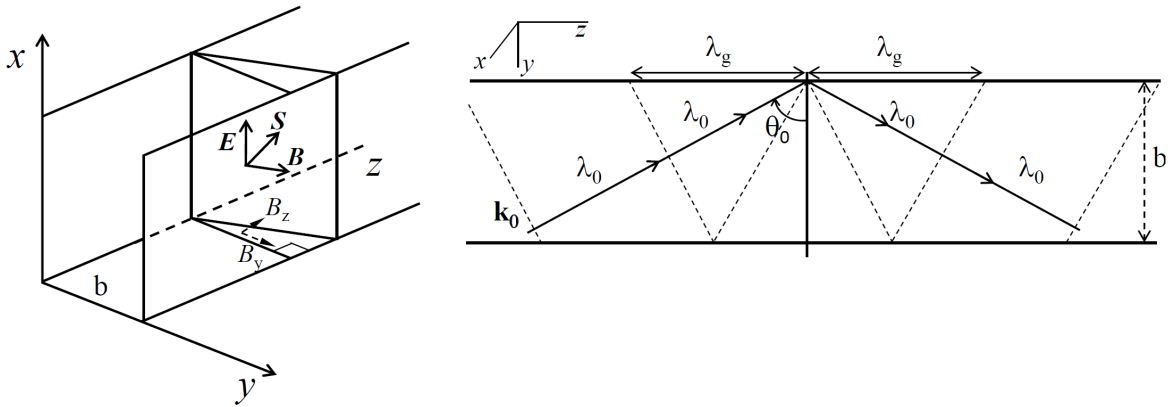
e

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{g}(\vec{r}, t),$$

determine as equações que  $f$  e  $\vec{g}$  devem satisfazer.

## QUESTÃO 4: Propagação de uma onda eletromagnética entre placas perfeitamente condutoras

Considere a propagação de uma onda eletromagnética (OEM) entre duas placas paralelas e perfeitamente refletoras, conforme indicado na figura. O comprimento de onda da OEM é  $\lambda_0$  e o campo elétrico incidente é descrito por  $\vec{E}_0 = \hat{x}E_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})]$ , onde  $|\vec{k}_0| = k_0 = \omega/c$  é a constante de propagação no espaço livre. As direções de propagação das ondas incidente ( $\vec{k}_0$ ) e refletida estão mostradas na figura. O espaço entre as placas é mantido no vácuo e não existem cargas nem correntes neste espaço. A componente tangencial do campo elétrico total (incidente mais refletido) é nula sobre as superfícies metálicas  $y = 0$  e  $y = b$ .



a) (40%) Considere que a OEM sofre múltiplas reflexões entre as placas e que em cada reflexão o campo elétrico sofre mudança de fase de  $180^\circ$ . Mostre então que só podem se propagar entre as placas, sem sofrer atenuação, as ondas que satisfaçam à condição  $k_0 b \cos \theta_0 = n\pi$ , onde  $n = 0, 1, 2, \dots$

b) (40%) Considerando as condições de contorno sobre o campo elétrico, determine o comprimento de onda efetivo,  $\lambda_c$ , ao longo da direção  $y$  e mostre que  $\lambda_c = \lambda_0 / \cos \theta_0$ .

c) (20%) Usando o resultado do item (b) e observando que o comprimento de onda efetivo ao longo da direção  $z$  é  $\lambda_g = \lambda_0 / \sin \theta_0$ , mostre que: (i) a velocidade de fase da onda ao longo da direção de propagação é  $u = c / \sin \theta_0$ ; (ii) a componente de velocidade da frente de onda na direção  $z$  é  $u_z = c \sin \theta_0$ ; e (iii)  $u = c\lambda_c / \sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}$